Grado en Matemáticas

Examen de Análisis Funcional

1. Dada una sucesión acotada, $y \in \ell_\infty$, se define un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_p$, donde $1 \leqslant p \leqslant \infty$, por
$$[Tx](n) = y(n)x(n) \quad (x \in \ell_p, n \in \mathbb{N})$$
a) Estudia la continuidad de T y calcula su norma. ¿Hay algún valor de p para el que pueda asegurarse que T alcanza su norma?
b) Prueba que T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, $y(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y existe un número $r > 0$ tal que $\dfrac{1}{|y(n)|} \geqslant r$.

2. Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Prueba que si M y X/M son espacios de Banach, entonces X es un espacio de Banach.

3. Sea $\mathcal{P}$ el espacio de los polinomios (de una variable real con coeficientes reales) con la norma
$$\|p\| = \sup \{|p(t)| \,:\, -1 \leqslant t \leqslant 1\}$$
Estudia la continuidad de las aplicaciones lineales $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ y $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, definidas respectivamente por $f(p) = p(2)$ y $T(p) = p'$ para todo $p \in \mathcal{P}$.

4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert; dados $a, b \in \mathcal{H}$ se define el operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por
$$T(x) = \big\langle x \big| a \big\rangle\, b \quad (x \in \mathcal{H})$$
Prueba que T es continuo y calcula su norma. ¿Qué condición deben cumplir a y b para que T sea una proyección ortogonal?

5. Prueba que existen números reales únicos α, β, γ tales que
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{e}^t - \alpha - \beta \cos t - \gamma \operatorname{sen} t\right|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{e}^t - a - b \cos t - c \operatorname{sen} t\right|^2 \, \mathrm{d}t$$
cualesquiera sean los números reales a, b, c. Calcula dichos números α, β, γ.

6. Sea X un espacio normado. Prueba que para cada $x \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|x\|$ y $f(x) = \|x\|^2$. Deduce que para todo $x \in X$ se verifica que
$$\|x\| = \text{máx}\, |f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1$$

7. Sea X un espacio normado y $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Prueba que existe un subespacio cerrado $M \subset X$ tal que $X = M \oplus \mathbb{K}x$ y $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

8. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos en un espacio normado X y supongamos que $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$. Prueba que $x \in \overline{Lin\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

9. Sea X un espacio normado, M un subespacio cerrado de X y $x_0 \in X \setminus M$. Prueba que $M + \mathbb{K}x_0$ es un subespacio cerrado de X.

10. Sea X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ un operador lineal continuo e inyectivo. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) $T(X)$ es cerrado en Y.

    b) $T^{-1} : T(X) \to X$ es continuo.

11. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ un operador lineal continuo y sobreyectivo. Sea $C \subset X$ un subconjunto no vacío de X. Prueba que $T(C)$ es cerrado si, y sólo si, $\ker(T) + C$ es cerrado.

12. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ un operador lineal continuo y sobreyectivo. Prueba que existe $m > 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ con $Tx = y$ y $\|x\| \leqslant m\|y\|$.

13. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X tales que $X = M \oplus N$. Prueba que existe $k > 0$ tal que $\|m\| \leqslant k\|m+n\|$ para todos $m \in M$, $n \in N$.

14. Sea X un espacio normado y M un subespacio propio cerrado de X. Prueba que M es igual a la intersección de todos los hiperplanos cerrados que lo contienen.

15. Sea $C[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[0,1]$ con la norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t \qquad (f \in C[0,1])$$

    Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $T_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$T_n(f) = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\, \mathrm{d}t \qquad (f \in C[0,1])$$

    a) Prueba que T_n es un funcional lineal continuo y calcula su norma.

    b) Prueba que la sucesión $\{T_n\}$ es puntualmente convergente y que su límite puntual, $T(f) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(f)\}$, es un funcional lineal discontinuo.

    c) Aunque el conjunto $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C[0,1]^* = L(C[0,1], \mathbb{R})$, está puntualmente acotado (como se deduce de b)), no está acotado en $C[0,1]^*$ (como se deduce de a)). ¿Contradice esto el teorema de Banach – Steinhaus?

16. Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$. ¿Es esto cierto si el espacio no es reflexivo?

17. Sea $p > 1$ y $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $y \in \ell_p$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ tiene sumas parciales acotadas. Prueba que $x \in \ell_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

18. Sean $\|\,.\,\|_1$ y $\|\,.\,\|_2$ dos normas completas en un espacio vectorial X que tienen los mismos funcionales lineales continuos. Prueba que dichas normas son equivalentes.

19. En ℓ_∞ se define una norma por
$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{2^n}$$
Estudia si ℓ_∞ con dicha norma es un espacio de Banach.

20. Prueba que el dual de c_0 es isométricamente isomorfo a ℓ_1.

21. Prueba que el dual de c es isométricamente isomorfo a ℓ_1.

22. Prueba que el dual de ℓ_p, con $p > 1$ es isométricamente isomorfo a ℓ_q donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Prueba también que todo funcional $f \in \ell_p^*$ alcanza su norma.

23. Sea $f : c_0 \to \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) f alcanza su norma, esto es, existe $z \in c_0$ con $\|z\|_\infty = 1$ tal que $\|f\| = |f(z)|$.

    b) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$ se verifica que $f(e_n) = 0$, donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ son los vectores unidad.

24. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{C_n\}$ una sucesión de conjuntos no vacíos, convexos cerrados y acotados, tales que $C_{n+1} \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \neq \text{Ø}$.

    Sugerencia. Sea $x_n \in C_n$ tal que $\|x_n\| = \text{mín}\,\{\|x\| : x \in C_n\}$. Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

25. Sea X un espacio normado, $A \subset X$ y $z \in X$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) $z \in \overline{Lin(A)}$.

    b) Para todo $f \in X^*$ con $A \subset Ker(f)$ se verifica que $f(z) = 0$.

26. Sea $Y = \{x \in \ell_2 : x(1) = 0, x(2) + x(3) = 0, x(3) + x(4) = 0\}$. Calcula la proyección ortogonal de ℓ_2 sobre $Y^\perp$.

    Sugerencia. Observa que $Y = A^\perp$ para conveniente A.

27. Sea $Y = \{x \in \ell_2 : x(1) = x(2) = x(3)\}$. Calcula la proyección ortogonal de ℓ_2 sobre Y.

    Sugerencia. Observa que $Y = A^\perp$ para conveniente A.

28. Sea X un erspacio de Banach. Prueba que si X^* contiene un subespacio cerrado propio que separa puntos en X entonces X no es reflexivo.

29. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y.

    b) Existe $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

30. Sea X un espacio de Banach, $A \subset X$ tal que $X = \overline{Lin(A)}$, $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de X^* y $f \in X^*$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) Para todo $x \in X$ se verifica que $\lim \{f_n(x)\} = f(x)$.

    b) El conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado en X^* y para todo $a \in A$ se verifica que $\lim \{f_n(a)\} = f(a)$.

31. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $|||x||| = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) T es continua.

    b) $\| \,.\, \|$ y $||| \,.\, |||$ son normas equivalentes.

    c) $||| \,.\, |||$ es una norma completa en X.

32. (0,5 puntos cada una) Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y, cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

    a) Si X, Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X en Y cuyo núcleo sea cerrado es continuo.

    b) Todo subespacio cerrado propio de un espacio normado es igual a la intersección de los hiperplanos cerrados que lo contienen.

    b) ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial de las funciones polinómicas?

    b) Sea X un espacio normado de dimensión infinita. ¿Puede existir alguna norma en el dual X^* cuya topología sea la topología débil-* de X^*?

    b) Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Supongamos que para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \ker(T^n)$. Entonces existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = 0$.

    b) Todo conjunto w-compacto en un espacio normado está acotado.

    c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un funcional lineal continuo de X en ℓ_∞.

33. (3 puntos) Responde a uno de los dos siguientes temas.

    a) Formas geométricas del teorema de Hahn-Banach. Separación de conjuntos convexos.

    b) Teorema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus. Alguna aplicación.

    c) Teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada.

Granada, 20 de diciembre de 2018